

LBRIS

We know
books

Marius BURTEA

Georgeta BURTEA

MATEMATICĂ

**Culegere de probleme și subiecte
pentru teză**

Clasa a VIII-a

Semestrul I

EDITURA  CARMINIS
PITEȘTI

CUPRINS**ALGEBRĂ****Capitolul I. NUMERE REALE**

| | |
|---|----|
| I.1. Mulțimi de numere: \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, \mathbb{R} | 3 |
| I.1.1. Forme de scriere a unui număr real | 4 |
| I.1.2. Reprezentarea numerelor reale pe axă. Aproximări Ordonare | 8 |
| I.1.3. Modulul unui număr real | 12 |
| I.1.4. Intervale de numere reale | 16 |
| <i>Teste de verificare a cunoștințelor</i> | 22 |
| I.2. Operații cu numere reale | 25 |
| <i>Teste de verificare a cunoștințelor</i> | 36 |
| I.3. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere | 41 |
| I.3.1. Operații cu numere reale reprezentate prin litere ... | 41 |
| I.3.2. Formule de calcul prescurtat | 45 |
| I.3.3. Descompuneri în factori | 49 |
| I.4. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere | 54 |
| I.4.1. Amplificarea. Simplificarea | 54 |
| I.4.2. Adunarea și scăderea rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere | 58 |
| I.4.3. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere a rapoartelor de numere reale reprezentate prin litere | 61 |
| <i>Teste de verificare a cunoștințelor</i> | 69 |

Capitolul al II-lea. FUNCȚII

| | |
|--|----|
| II.1. Noțiunea de funcție. Graficul unei funcții | |
| Funcții egale | 76 |
| II.2. Funcții de tipul $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, | |
| $A \subset \mathbb{R}$ | 82 |
| <i>Teste de verificare a cunoștințelor</i> | 92 |

Coperta: **Giorgian Ion Gînguț**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

BURTEA, MARIUS**Matematică: culegere de probleme și subiecte pentru
teză: clasa a VIII-a / Marius Burtea, Georgeta Burtea. – Pitești:
Carminis Educațional, 2008**

148 p.; 20,5 cm

ISBN 978-973-123-058-0

I. Burtea, Georgeta

51(075.33)(076)

Copyright © Editura CARMINIS

Redactor: **Carmen Trandafirescu**Tehnoredactori: **Constantin Florea, Raluca Boloșteanu**Corectură: **autorii**Tehnoredactare computerizată: **Editura CARMINIS**Tiparul executat la S.C. **TIPARG S.A. Pitești**

Comenzile se primesc la

tel./fax: **0248/253022, 252467**sau pe adresa: **Editura CARMINIS**

str. Exercițiu, bl. D22, sc. B, ap. 1

cod 110242, Pitești, jud. Argeș

e-mail: **editura_carminis@yahoo.com****www.carminis.ro**

ISBN 978-973-123-058-0

ALGEBRĂ

Capitolul I NUMERE REALE

I.1. Mulțimi de numere: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, \mathbb{R}

Noțiuni teoretice

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ mulțimea numerelor naturale;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ mulțimea numerelor întregi;

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} \text{ mulțimea numerelor raționale;}$$

 \mathbb{R} = mulțimea numerelor reale; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}; \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

- Scrierea unui număr rațional:
 - fracție ordinară: $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$;
 - fracție zecimală:
 - finită (are un număr finit de zecimale);
 - infinită (are un număr infinit de zecimale, periodice).

Exemplu:

a) 2,75; -3,402 sunt fracții zecimale finite;

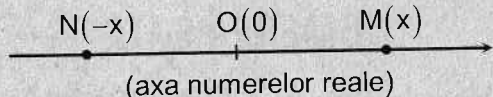
b) 2,(75) este fracție zecimală infinită, **periodică simplă** și

$$2,(75) = 2 + \frac{75}{99}.$$

1,2(5) este fracție zecimală infinită, **periodică mixtă** și $1,2(5) =$

$$= 1 + \frac{25 \cdot 2}{90}.$$

- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ = mulțimea numerelor reale nenegative.
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ = mulțimea numerelor reale strict pozitive.
- $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ = mulțimea numerelor reale strict negative.



- $-x$ este opusul elementului x ;
- $\frac{1}{x}$ este inversul elementului nenul x .

I.1.1. Forme de scriere a unui număr real

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

- 1. Precizați valoarea de adevăr a afirmațiilor:
- | | | |
|-----------------------------------|---|--|
| a) $5 \in \mathbb{N}$; | b) $0 \notin \mathbb{N}^*$; | c) $0 \notin \mathbb{Z}$; |
| d) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; | e) $\frac{2}{8} \notin \mathbb{R}$; | f) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; |
| g) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; | h) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{Z}$; | i) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$; |
| j) $2,5 \in \mathbb{Q}$; | k) $-4\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; | l) $\frac{4}{8} \notin \mathbb{Z}$; |
| m) $\frac{8}{4} \in \mathbb{Z}$; | n) $1,(3) \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | o) $1,01111\dots \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; |
| p) $(-2)^3 \in \mathbb{N}$; | q) $(-2)^4 \in \mathbb{N}$; | r) $\sqrt{5^5} \in \mathbb{Q}$. |
- 2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
- | | | |
|---|---|---|
| a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; | b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; | c) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; |
| d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$; | e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$; | f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; |
| g) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$; | h) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; | i) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; |
| j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; | k) $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; | l) $\emptyset \subset \mathbb{N}$; |
| m) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$; | n) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$; | o) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$. |

- 3. Fie mulțimea $A = \left\{ \frac{5}{3}; \sqrt{12}; -2,4; 5,(3); \sqrt{0,25}; -\frac{22}{11}; 3,1(2); -2,(4); 0,02; \frac{72}{36}; \sqrt{324} \right\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A_1 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{N}\}; \quad A_2 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\};$$

$$A_3 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Q}\}; \quad A_4 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{R}\};$$

$$A_5 = \{x \in A \mid x \notin \mathbb{Q}\}; \quad A_6 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}.$$

- 4. Se consideră mulțimea: $B = \left\{ 2,4; -1\frac{3}{4}; \sqrt{3}; 4; -4,(5); 3,14; \pi; -10; \frac{\sqrt{49}}{7}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{81}{169}} \right\}$. Determinați mulțimile:

$$B_1 = \{x \in B \mid x \in \mathbb{Q}\}; \quad B_2 = \{x \in B \mid x \in \mathbb{Z}\};$$

$$B_3 = \{x \in B \mid x \in \mathbb{N}\}; \quad B_4 = \{x \in B \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\};$$

$$B_5 = \{x \in B \mid x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}; \quad B_6 = \{x \in B \mid x \in \mathbb{R}_+^*\}.$$

- 5. Se consideră mulțimea $C = \left\{ -31; \frac{52}{13}; -\sqrt{3}; \pi; (-1)^3; 9,2; -\frac{5}{6}; \sqrt{625}; \frac{-15}{-7}; 0 \right\}$. Determinați mulțimile:

$$a) C \cap \mathbb{N}; \quad b) C \cap \mathbb{Z}; \quad c) C \cap \mathbb{Q};$$

$$d) C \setminus \mathbb{Q}; \quad e) C \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}^*); \quad f) C \cap [\cup(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})].$$

- 6. Scrieți sub formă de fracție zecimală următoarele fracții ordinare:

$$a) \frac{18}{5}; \quad b) \frac{-16}{25}; \quad c) \frac{28}{9}; \quad d) \frac{104}{10}; \quad e) \frac{-209}{90};$$

$$f) \frac{209}{100}; \quad g) \frac{-20}{99}; \quad h) \frac{235}{10^4}; \quad i) 54 \cdot 10^{-3}; \quad j) \sqrt{\frac{144}{256}}.$$

- UBRIS | We know books
- 7. Transformați în fracții ordinare următoarele numere:
 a) 6,5; b) 0,36; c) -4,02;
 d) 0,0015; e) -0,003; f) 2,(4);
 g) -1,(32); h) 2,2(3); i) -5,02(41);
 j) $0,(18) + 0,(42) + 0,(38)$.

□ 8. Determinați a 847-a zecimală a numărului $\frac{148}{14}$.

□ 9. Determinați a 7-a, a 24-a, a 1243-a zecimală a numărului $\frac{496}{17}$.

□ 10. Determinați zecimala a 12-a, a 18-a, a 21-a, a 84-a, a 500-a și a 2579-a a fiecăruia dintre numerele $m = \frac{20}{13}$ și $n = \frac{123}{17}$.

□ 11. Fie fracția zecimală periodică $0,(4231950) = 0,a_1a_2a_3\dots$.
 Calculați $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2009}$.

□ 12. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{10}{13} = 0,a_1a_2a_3\dots$. Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2009}$.

□ 13. Știind că $\frac{4}{7} = 0,a_1a_2a_3\dots$ să se determine suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2009}$.

- 14. Enumerați trei elemente din fiecare mulțime:
 a) $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$; b) $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$;
 c) $C = \{y \mid y = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$; d) $D = \{n \mid n = p^2, p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

- 15. Stabiliți și justificați valoarea de adevăr a propozițiilor:
 a) $-4 \in \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$; b) $-15 \in \{x \mid x = 5p, p \in \mathbb{N}\}$;
 c) $-1 \in \{x \mid x = n^3, n \in \mathbb{Q}\}$; d) $\sqrt{2} \in \{y \mid y = k^2, k \in \mathbb{N}\}$;
 e) $7 \in \{u \mid u = y^2, y \in \mathbb{R}\}$; f) $64 \in \{x \mid x = y^2, y \in \mathbb{Z}\}$.

□ 16. Calculați rădăcina pătrată a numerelor:
 a) 144; 0,64; 4^5 ; 10^4 ; $(-3)^6$; $4^2 \cdot 3^8$; $25n^2$ ($n \in \mathbb{N}$);
 b) 225; 1296; 31,36; 207,36; 0,002304; 42; 150.

□ 17. Se consideră mulțimea $A = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$. Care este probabilitatea ca alegând un element din A acesta să fie număr rațional?

□ 18. Demonstrați că numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{3}$ nu sunt numere raționale.

□ 19. Demonstrați că $\sqrt{6}$, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ nu sunt numere raționale.

□ 20. Fără a calcula radicalii, să se justifice faptul că numerele $\sqrt{45908}$, $\sqrt{1028852}$ și $\sqrt{420137}$ nu sunt numere raționale.

□ 21. Arătați că numărul $a = \sqrt{2^{2008} + 3^{1004}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

□ 22. Demonstrați că numărul $\sqrt{5n+2} \notin \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

- 23. Demonstrați inegalitățile de numere naturale:
 a) $n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2, n \in \mathbb{N}^*$;
 b) $(2n+1)^2 \leq 4n^2 + 5n \leq (2n+2)^2, n \in \mathbb{N}^*$.

□ 24. Demonstrați că:

a) $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\sqrt{4n^2 + 5n} \notin \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

□ 25. Determinați numerele naturale $n, n < 10$ pentru care prima zecimală a numărului $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ este egală cu 2.

□ 26. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}$; b) $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid 45 \text{ se divide cu } (n+1) \}$;

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{35}{2x+3} \in \mathbb{Z} \right\}$; d) $D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x+7}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$;

e) $E = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+6}{2x-5} \in \mathbb{Z} \right\}$; f) $F = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{4x+9}{3x-2} \in \mathbb{N} \right\}$.

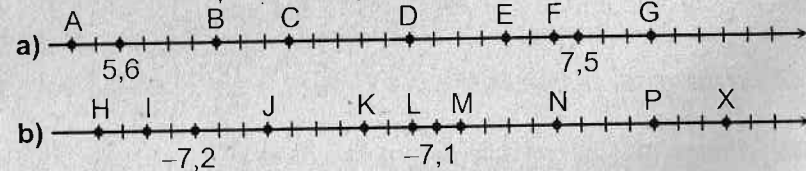
I.1.2. Reprezentarea numerelor reale pe axă

Aproximări. Ordonare

□ 1. Ordonati pe axă următoarele numere reale:

a) $\sqrt{5}; -2; 0,5$; b) $-\sqrt{8}; 0; \frac{8}{5}; -4,5$; c) $3\frac{1}{4}; -7\frac{1}{2}; 1,5$.

□ 2. Determinați abscisele punctelor din reprezentarea de mai jos:



□ 3. Comparați următoarele numere:

a) $\frac{3}{2}$ și $\sqrt{2}$;

b) 7,3 și 8,01;

c) 2,(5) și 2,50;

d) -3 și $-\sqrt{8}$;

e) $-2\frac{1}{3}$ și $-2,29$;

f) 32 și $\sqrt{1024}$;

g) 5^{12} și 8^9 ;

h) $3\sqrt{8}$ și $4\sqrt{5}$.

□ 4. Folosiți simbolurile $<, >, \leq, \geq$ și formați propoziții adevărate folosind perechile de numere:

a) $2,(3) \square 2,32$;

b) $3\sqrt{5} \square 2\sqrt{11}$;

c) $-4\sqrt{3} \square -3\sqrt{5}$;

d) $2 - \sqrt{3} \square 3 - \sqrt{5}$;

e) $0,3^{-2} \square 2^{-1}$;

f) $27^{-3} \square 3^{-8}$.

□ 5. Ordonati crescător numerele reale:

a) $3\sqrt{2}, 4\sqrt{6}, 2\sqrt{5}, 5\sqrt{2}, 3\sqrt{7}$;

b) $4\sqrt{5}, 9\sqrt{2}, 2\sqrt{11}, 46, 5\sqrt{6}, 2\sqrt{15}, 6\sqrt{10}$.

□ 6. Ordonati descrescător numerele:

a) $-3\sqrt{5}, -2\sqrt{6}, -\sqrt{42}, -4\sqrt{11}, -8\sqrt{2}$;

b) $8\sqrt{2}, -3\sqrt{3}, 7\sqrt{5}, -4\sqrt{7}, -11\sqrt{2}, 14$.

□ 7. Încadrați între două numere întregi consecutive fiecare din numerele: $\frac{15}{7}; -21,4; \sqrt{650}; -\sqrt{32}; \sqrt{1000}$.

□ 8. Determinați partea întreagă, $[\cdot]$, și partea fracționară, $\{ \cdot \}$, a numerelor:

a) 3,4;

b) -3,4;

c) $4\frac{1}{2}$;

d) $-4\frac{1}{2}$;

e) $\sqrt{24,01}$;

f) $-\sqrt{5,29}$;

g) 12,001;

h) -0,03;

i) $\frac{3}{\sqrt{2}}$;

j) $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$;

k) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$;

l) $-\sqrt{57-28\sqrt{2}}$.

LIBRIS We know books

We know books

9. Calculați părțile întregi:
 a) $\lceil (\sqrt{2}+1)^2 \rceil$; b) $\lceil (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 \rceil$; c) $\lceil (\sqrt{2}-1)^3 \rceil$.

10. Dacă $x - \lceil \sqrt{3} \rceil - \{1,1(6)\} = \lceil \sqrt{3} \rceil + \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \{4,(3)\}$, să se determine:

a) $\lceil x \rceil$; b) $\{x\}$; c) $\lceil 5x \rceil$.

11. Dacă $a + \sqrt{5} - \{2,8(3)\} - \lceil \sqrt{5} - 8 \rceil = \left\{ \frac{5}{3} \right\} + \{7,0(6)\} + \{3 + \sqrt{5}\}$,

să se determine:

a) $\{a\}$; b) $\lceil a \rceil$; c) $\lceil 6a \rceil$.

12. Se consideră numărul $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+4)(n+5)}$,

$n \in \mathbb{N}$. Să se determine numărul natural n pentru care $\{a\} = 0,99$.

13. Să se calculeze partea întreagă a numerelor:

a) $\sqrt{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{n^2 + 3n}, n \in \mathbb{N}$;
 c) $\sqrt{n^2 + 6n}, n \in \mathbb{N}$; d) $\sqrt{4n^2 + n}, n \in \mathbb{N}$.

14. Folosind eventual punctul a) de la exercițiul 13, să se verifice egalitatea:

a) $\lceil \sqrt{1 \cdot 2} \rceil + \lceil \sqrt{2 \cdot 3} \rceil + \lceil \sqrt{3 \cdot 4} \rceil + \dots + \lceil \sqrt{50 \cdot 51} \rceil = 1275$;
 b) $\lceil \sqrt{1 \cdot 2} \rceil + \lceil \sqrt{2 \cdot 3} \rceil + \dots + \lceil \sqrt{n^2 + n} \rceil = \frac{n(n+1)}{2}$.

15. Să se calculeze partea întreagă a numerelor:

a) $\lceil (\sqrt{2} + \sqrt{2n^2 + 1})^2 \rceil$; b) $\lceil (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rceil$.

16. Determinați numărul natural \overline{ab} , știind că:

a) $\lceil \sqrt{ab} \rceil = 7$ și $a + b = 8$;

Olimpiadă Arad, 2003

b) $\lceil \sqrt{ab} \rceil = 6$, \overline{ab} număr prim și $a + b = 5$.

17. Rezolvați ecuațiile:

a) $\lceil x+1 \rceil = 4$; b) $\lceil 3x+7 \rceil = 16$; c) $\lceil x \rceil + \lceil x+1 \rceil = 9$.

18. Fie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cu proprietatea $a \leq b$. Comparați numerele

$\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$ în cazurile:

- a) a și b sunt pozitive;
- b) a și b sunt negative;
- c) $a < 0 < b$.

19. Aproximați prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât

10^{-3} numerele: $\frac{3}{7}; \sqrt{5}; \frac{17}{3}; 3\frac{7}{15}; 4,57321$.

20. Rotunjiți numerele $\frac{49}{17}$ și $\frac{144}{7}$:

- a) la a doua zecimală;
- b) la a patra zecimală;
- c) la a opta zecimală.

21. Se dă mulțimea $A = \left\{ -5, 2; \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}; -\sqrt{6}; 0; -81; -3\pi; -3^2; \right.$

$\left. (-3)^4; (\sqrt{7})^{-2}; (-4)^{-1}; \sqrt{0,09} \right\}$. Determinați următoarele submulțimi ale mulțimii A: